Ueber die Irreductibilität algebraischer Functionalgleichungen und linearer Differentialgleichungen.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Eine algebraische Gleichung von der Form

$$(1)\quad \mathfrak{p}_0(x-\alpha)y^n+\mathfrak{p}_1(x-\alpha)y^{n-1}+\cdots+\mathfrak{p}_{n-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{p}_n(x-\alpha)=0,$$

worin die Coefficienten endliche oder unendliche convergente Potenzreihen von $x-\alpha$ bedeuten, für welche $\mathfrak{p}_0(0)$, $\mathfrak{p}_1(0), \ldots \mathfrak{p}_{n-1}(0)$, $\mathfrak{p}_n(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, kann stets durch Multiplication mit einer positiven ganzzahligen Potenz von $x-\alpha$ auf die Normalform gebracht werden

$$(2)\quad \begin{aligned}(x-\alpha)^n\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^n+(x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{n-1}+\cdots\\ \cdots+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)=0,\end{aligned}$$

in welcher $\mathfrak{P}_0, \ldots \mathfrak{P}_n$ wiederum Reihen von demselben Charakter sind, die nicht sämmtlich für $x=\alpha$ den Werth Null annehmen.

Wir werden nun die Gleichung (2) in der Umgebung von $x=\alpha$ irreductibel nennen, wenn sie mit keiner Gleichung niederen Grades

$$(3)\quad \begin{aligned}(x-\alpha)^\nu\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^\nu+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{\nu-1}+\cdots\\ \cdots+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)=0,\end{aligned}$$

deren Coefficienten denselben Charakter haben, in der Umgebung von α eine Lösung gemein hat, so dass, wenn die Gleichung (2) in dem angegebenen Sinne reductibel ist, wie unmittelbar zu erkennen, die in y identische Gleichung bestehen muss

$$(4)\quad \begin{aligned}&(x-\alpha)^n\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^n+(x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{n-1}+\cdots\\ &\qquad\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)\\ &=\{(x-\alpha)^\nu\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^\nu+\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)\}\\ &\quad\{(x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)y^{n-\nu}+\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)\},\end{aligned}$$

worin die $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{n-\nu}$ wiederum Reihen von demselben Charakter bedeuten, die für $x=\alpha$ nicht sämmtlich verschwinden.

Zunächst mag mit Rücksicht auf die späteren Resultate für lineare Differentialgleichungen hervorgehoben werden, dass die Substitution

$$y = \frac{z}{(x-\alpha)^{\varrho-1}},$$

wenn ϱ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, die beiden Gleichungen

$$(x-\alpha)^{n\varrho}\,\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{(n-1)\varrho}\,\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (x-\alpha)^{\varrho}\,\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y + \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0$$

und

$$(x-\alpha)^{n}\,\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{n-1}\,\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (x-\alpha)\,\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha) + \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0$$

zugleich irreductibel und reductibel werden lässt, und es soll nunmehr untersucht werden, unter welchen Bedingungen die algebraische Gleichung

$$(5)\qquad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\,\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\,\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\,\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y + (x-\alpha)^{\mu_n}\,\mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0,$$

in welcher $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots, \mathfrak{P}_n(0)$ sämmtlich von Null verschieden sind, irreductibel ist, wobei wir bemerken wollen, dass wir uns zur Untersuchung einer Methode bedienen, die sich nicht wesentlich von der früher von mir zur Ausdehnung des Eisenstein'schen Satzes benutzten unterscheidet, die aber gerade in dieser Form auf die Feststellung der Irreductibilität linearer Differentialgleichungen übertragbar ist.*)

Da, wenn die Gleichung (5) reductibel ist, eine in y identische Beziehung bestehen muss

---

*) Der erste von Eisenstein herrührende Satz über die Irreductibilität gewisser algebraischer Zahlengleichungen sowie die weiteren von mir durch functionentheoretische Betrachtungen hergeleiteten Sätze lassen sich, wie man aus dem Obigen ohne weitere Schwierigkeiten erkennt, auch auf Gleichungen ausdehnen, deren Coefficienten transcendente Zahlen sind, und es folgt z. B. unmittelbar der Satz, dass eine Gleichung von der Form

$$s^{n\varrho+1}\,g_0(s)\,x^n + s^{(n-1)\varrho+1}\,g_1(s)\,x^{n-1} + \cdots + s^{\varrho+1}\,g_{n-1}(s)\,x + g_n(s) = 0,$$

in welcher ϱ eine beliebige positive ganze Zahl, s eine transcendente Zahl,

$$g_0(s),\ g_1(s),\ \ldots,\ g_n(s)$$

ganze Functionen von s darstellen, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind und $g_0(s)$, $g_n(s)$ nicht den Factor s haben, in dem Sinne irreductibel ist, dass sie mit keiner Gleichung niederen Grades, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen der transcendenten Zahl s mit algebraischen Coefficienten sind, eine Lösung gemein hat.

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & (x-\alpha)^{n+\mu_0}[\mathfrak{P}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_0'(0)+\cdots]y \\
& + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}[\mathfrak{P}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_1'(0)+\cdots]y^{n-1}+\cdots \\
& \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}[\mathfrak{P}_{n-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}'(0)+\cdots]y \\
& + (x-\alpha)^{\mu_n}[\mathfrak{P}_n(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_n'(0)+\cdots] \\
= & \{(x-\alpha)^{\nu}[\mathfrak{Q}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots]y^{\nu} \\
& + (x-\alpha)^{\nu-1}[\mathfrak{Q}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_1'(0)+\cdots]y^{\nu-1}+\cdots \\
& \cdots + (x-\alpha)[\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\cdots]y \\
& + \mathfrak{Q}_{\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu}'(0)+\cdots\} \\
\times & \{(x-\alpha)^{n-\nu}[\mathfrak{R}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots]y^{n-\nu} \\
& + (x-\alpha)^{n-\nu-1}[\mathfrak{R}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_1'(0)+\cdots]y^{n-\nu-1}+\cdots \\
& \cdots + (x-\alpha)[\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)+\cdots]y \\
& + \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)+\cdots\},
\end{aligned}
$$

worin

$$\mathfrak{P}_0(0),\ \mathfrak{P}_1(0),\ldots,\ \mathfrak{P}_{n-1}(0),\ \mathfrak{P}_n(0)$$

von Null verschieden, und von den Zahlen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}, \mu_n$ mindestens eine gleich Null ist, so wird die Substitution

$$y = \frac{\varkappa}{x-\alpha}$$

die in $\varkappa$ identische Gleichung

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad & (x-\alpha)^{\mu_0}[\mathfrak{P}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_0'(0)+\cdots]\varkappa^{n} \\
& + (x-\alpha)^{\mu_1}[\mathfrak{P}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_1'(0)+\cdots]\varkappa^{n-1}+\cdots \\
& \cdots + (x-\alpha)^{\mu_{n-1}}[\mathfrak{P}_{n-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}'(0)+\cdots]\varkappa \\
& + (x-\alpha)^{\mu_n}[\mathfrak{P}_n(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_n'(0)+\cdots] \\
= & \{[\mathfrak{Q}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots]\varkappa^{\nu} \\
& + [\mathfrak{Q}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_1'(0)+\cdots]\varkappa^{\nu-1}+\cdots \\
& \cdots + [\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\cdots]\varkappa \\
& + \mathfrak{Q}_{\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu}'(0)+\cdots\} \\
\times & \{[\mathfrak{R}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots]\varkappa^{n-\nu} \\
& + [\mathfrak{R}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_1'(0)+\cdots]\varkappa^{n-\nu-1}+\cdots \\
& \cdots + [\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)+\cdots]\varkappa \\
& + \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)+\cdots\}
\end{aligned}
$$

ergeben.

Sei nun $\mu_n = 0$, $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1} \geqq 1$, so liefert die Vergleichung der Coefficienten von $(x-\alpha)^0$ auf beiden Seiten der Gleichung die Beziehung

$$
\begin{aligned}
& (\mathfrak{Q}_0(0)\varkappa^{\nu}+\mathfrak{Q}_1(0)\varkappa^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)\varkappa+\mathfrak{Q}_{\nu}(0)) \\
\times & (\mathfrak{R}_0(0)\varkappa^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1(0)\varkappa^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)\varkappa+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)) = \mathfrak{P}_n(0),
\end{aligned}
$$

woraus sich

$$\mathfrak{Q}_0(0)=\mathfrak{Q}_1(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)=0,\quad \mathfrak{R}_0(0)=\mathfrak{R}_1(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)=0,$$
$$\mathfrak{Q}_\nu(0)\cdot\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)=\mathfrak{P}_n(0),$$

also $\mathfrak{Q}_\nu(0)$ und $\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ von Null verschieden ergiebt, da $\mathfrak{P}_n(0)$ nicht Null ist; da aber dann der Coefficient von $(x-\alpha)^1$ auf der rechten Seite von (7) lautet

$$\mathfrak{Q}_\nu(0)(\mathfrak{R}_0'(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1'(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0))$$
$$+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)(\mathfrak{Q}_0'(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1'(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu'(0)),$$

während der Coefficient auf der linken Seite, wenn $\mu_0=1$ angenommen wird, eine ganze Function n^{ten} Grades von x ist, so ist die Unmöglichkeit des Bestehens der Gleichung (7) nachgewiesen, und damit der Satz hergeleitet,

dass eine algebraische Gleichung der Form

$$(8)\qquad (x-\alpha)^{\varrho n+1}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^n+(x-\alpha)^{\varrho(n-1)+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{n-1}$$
$$+(x-\alpha)^{\varrho(n-2)+\mu_2}\mathfrak{P}_2(x-\alpha)y^{n-2}+\cdots+(x-\alpha)^{\varrho+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y$$
$$+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)=0,$$

in welcher ϱ eine beliebige positive ganze Zahl, $\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_{n-1}\geqq 1$ und $\mathfrak{P}_0(0),\mathfrak{P}_1(0),\ldots\mathfrak{P}_n(0)$ von Null verschieden sind, in dem angegebenen Sinne irreductibel ist.

Sei wiederum $\mu_n=0$, aber $\mu_0=2$, $\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_{n-1}\geqq 2$, so wird sich durch Vergleichung der Coefficienten von $(x-\alpha)^1$ in der Gleichung (7)

$$\mathfrak{Q}_\nu(0)(\mathfrak{R}_0'(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1'(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0))$$
$$+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)(\mathfrak{Q}_0'(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1'(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu'(0))=\mathfrak{P}_n'(0)$$

ergeben; ist nun $n-\nu>\nu$, so folgt $\mathfrak{R}_0'(0)=0$, ist $n-\nu<\nu$, so ist $\mathfrak{Q}_0'(0)=0$, jedenfalls wird der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der rechten Seite von (7)

$$\frac{1}{2}\mathfrak{Q}_\nu(0)(\mathfrak{R}_0''(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1''(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}''(0))$$
$$+\frac{1}{2}\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)(\mathfrak{Q}_0''(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1''(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu''(0))$$
$$+(\mathfrak{Q}_0'(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1'(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu'(0))$$
$$\times(\mathfrak{R}_0'(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1'(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0))$$

höchstens vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in x sein, während die linke Seite, da $\mu_0=2$ ist, in dem Coefficienten die Potenz x^n enthält — nur wenn $n-\nu=\nu$, also n eine gerade Zahl ist, kann die Unmöglichkeit der Zerlegung nicht geschlossen werden, und wir finden somit, *dass eine algebraische Gleichung unpaaren Grades von der Form*

$$(9)\qquad (x-\alpha)^{\varrho n+2}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{\varrho(n-1)+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1}$$
$$+ (x-\alpha)^{\varrho(n-2)+\mu_2}\mathfrak{P}_2(x-\alpha)\,y^{n-2} + \cdots + (x-\alpha)^{\varrho+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y$$
$$+ \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0,$$

in welcher ϱ *wieder irgend eine positive ganze Zahl,* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1} \geqq 2$ *und* $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ *von Null verschieden sind, in dem angegebenen Sinne irreductibel ist; ist der Grad* n *jedoch ein paarer, so kann eine Zerlegung nur in zwei Factoren vom* $\frac{n}{2}$*ten Grade stattfinden, wenn die Gleichung überhaupt reductibel ist.*

Man sieht, dass man auf diesem Wege eine weitere Reihe von Irreductibilitätscriterien herleiten kann, doch kam es mir hier nur darauf an, die für die linearen Differentialgleichungen anzuwendende Methode vorzubereiten.

Es ergiebt sich zugleich unmittelbar, dass man diese Sätze auch aus den von mir in meiner Arbeit „Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen"*) angegebenen functionentheoretischen Methoden herleiten kann, da z. B. die Entwicklung der Lösungen der Gleichung (8) in der Umgebung des Punktes α die Form hat

$$y = a_0(x-\alpha)^{\frac{-\varrho n-1}{n}} + a_1(x-\alpha)^{\frac{-\varrho n}{n}} + a_2(x-\alpha)^{\frac{-\varrho n+1}{n}} + \cdots,$$

und man somit durch n-malige Umkreisung des Punktes α zu allen Zweigen der durch die Gleichung (8) in der Umgebung von α definirten Function y gelangen kann.

Im Anschluss an die eben erwähnte auf der Entwicklung der Functionen beruhende Beweisart der Irreductibilität wollen wir noch, bevor wir zur Ausdehnung der früheren Sätze auf die Bestimmung der Form irreductibler Differentialgleichungen übergehen, einige allgemeine Bemerkungen über die Gestalt einer algebraischen Gleichung mit in bestimmten Räumen eindeutigen, endlichen und stetigen Coefficienten hinzufügen, für welche in der Umgebung eines mehrfachen Punktes die Zahl der Cyklen, die Anzahl der Elemente eines jeden Cyklus und die Exponenten der Anfangsglieder der Entwicklung gegeben sind, Untersuchungen, die für den Fall ganzer Functionen als Coefficienten in ihren Resultaten in meiner Arbeit „Ueber die Entwicklungsform der algebraischen Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen"**) veröffentlicht wurden.

---

*) Journal für Mathematik B. 115, H. 1.

**) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, November 1898. Die Begründung der Resultate erscheint im Journal für Mathematik B. 121, H. 4.

Sei die Gleichung

$$f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0 \tag{10}$$

vorgelegt, deren Coefficienten sämmtlich innerhalb eines von einer geschlossenen Curve c begrenzten einfach zusammenhängenden Raumes T endlich, eindeutig und stetig sind, so kann zunächst durch die Substitution

$$y = \frac{z}{f_0(x)}$$

die Gleichung (10), wenn z wieder durch y ersetzt wird, in die Form

$$y^n + F_1(x)y^{n-1} + F_2(x)y^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(x)y + F_n(x) = 0 \tag{11}$$

gebracht werden, in welcher y für keinen innerhalb des Raumes T gelegenen Punkt unendlich gross wird, und $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_n(x)$ wieder innerhalb desselben Raumes eindeutig, endlich und stetig sind, sich also bekanntlich, wenn man den Raum T auf dem Einheitskreise in der ξ-Ebene vermöge der eindeutigen Functionen

$$x = \varphi(\xi), \quad \xi = \psi(x) \tag{12}$$

abbildet, innerhalb dieses Raumes in nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $\psi(x)$ fortschreitende Reihen entwickeln lassen.*) Sucht man nun die x-Werthe, welche mehrfache Punkte von y sind, so werden dieselben die Lösungen der durch Elimination von y zwischen (11) und der nach y genommenen Ableitung derselben

$$ny^{n-1} + (n-1)F_1(x)y^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(x) = 0 \tag{13}$$

erhaltenen Gleichung

$$\Delta(x) = 0 \tag{14}$$

sein, worin $\Delta(x)$ die wiederum im Raume T endliche, stetige und eindeutige Discriminante der Gleichung (11) darstellt. Diese Gleichung kann nun eine endliche oder unendliche Anzahl von Lösungen besitzen; im ersteren Falle wird den mehrfachen x-Punkten im T-Raume auch eine endliche Anzahl zugehöriger y-Werthe, von denen die unter einander verschiedenen mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varrho$ bezeichnet werden mögen, entsprechen, im letzteren Falle werden die Nullwerthe von $\Delta(x)$ sich in immer wachsender Anzahl gegen einen Punkt auf dem Rande von T zusammendrängen, indem die Nullwerthe von $\Delta(\varphi(\xi))$ im Innern des Einheitskreises in endlichen Distanzen von einander liegen und in immer zunehmender Anzahl sich einem Punkte auf der Peripherie dieses Kreises nähern, da sonst im Innern

*) Für die wirkliche Ausführung wird sich besser die neuerdings von **Mittag-Leffler** gegebene wesentliche Ausdehnung desjenigen Verfahrens eignen, welches **Weierstrass** zur Fortsetzung einer Function aus einem Elemente derselben angegeben hat.

dieses Raumes eine wesentliche Discontinuität der nach ganzen positiven Potenzen von $\psi(x)$ fortschreitenden convergenten Entwicklung von $\Delta(x)$ sich ergeben würde. Die verschiedenen der diesen unendlich vielen Lösungen der Discriminante entsprechenden Werthe von y werden sich nach der Grösse ihrer Moduln geordnet in die Folge bringen lassen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, worin $(\eta_\lambda)_{\lambda=\infty}$ gegen Unendlich zunimmt, da die Discriminante also auch einer der Coefficienten der Gleichung (11) in dem Punkte des Randes von T, gegen den sich die unendlich vielen Nullwerthe der Discriminante zusammendrängen, eine wesentliche Discontinuität besitzt. Ist nun die Zahl der η-Werthe eine endliche ϱ, so kann man eine ganze Function ϱ^{ten} Grades mit constanten Coefficienten

$$(15) \qquad z = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_\varrho y^\varrho$$

bestimmen, welche für $y = \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varrho$ verschwindet, und ebenso lässt sich bekanntlich, wenn mod. $\eta_{\lambda+1} \geqq$ mod. η_λ und $\lim\limits_{\lambda=\infty} \eta_\lambda = \infty$ ist, eine in der ganzen y-Ebene convergente Maclaurin'sche Reihe

$$(16) \qquad z = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$$

herstellen, deren Nullwerthe die sämmtlichen Werthe $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ und keine andern sind. Bildet man nun aus (15) oder (16), indem man für y die innerhalb des Raumes T definirten n Zweige der durch die Gleichung (11) gegebenen Function setzt, die Potenzsummen der zugehörigen Zweige $z_1, z_2, \ldots z_n$ der z-Function, so werden diese sich auch wieder als Lösungen einer Gleichung

$$(17) \qquad z^n + \varphi_1(x) z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x) z + \varphi_n(x) = 0$$

ergeben, deren Coefficienten innerhalb des T-Raumes eindeutig, endlich, stetig sind, und in welcher allen mehrfachen Punkten x der Gleichung (11) vermöge (15) oder (16) die Nullwerthe von z entsprechen werden, diese selbst also Lösungen der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ sein werden. Für eine Lösung α dieser Gleichung, welche in dem T-Raume liegt und nicht zu den mehrfachen Punkten der Gleichung (11) gehört, werden sich, wie aus (15) oder (16) hervorgeht, die n Zweige der Gleichung (17) nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \alpha$ entwickeln lassen, da die Lösungen der Gleichung (11) um diesen nicht mehrfachen Punkt herum eine solche Entwicklung besitzen; ist jedoch α eine Lösung von $\varphi_n(x) = 0$, welche zu den mehrfachen Punkten von (11) gehört, und sei in dessen Umgebung

$$z = A_0 (x-\alpha)^{\frac{\mu}{\nu}} + A_1 (x-\alpha)^{\frac{\mu+1}{\nu}} + \cdots,$$

worin A_0 von Null verschieden, oder wenn $(x-\alpha)^{\frac{1}{\nu}} = t$ gesetzt wird,

$$z = A_0 t^\mu + A_1 t^{\mu+1} + \cdots,$$

so folgt aus (15) oder (16)

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots - A_0 t^{\mu} - A_1 t^{\mu+1} - \cdots = \Omega(y, t) = 0,$$

und daher, da für $t = 0$ die Nullwerthe $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ der Reihe

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$$

sämmtlich verschieden waren, und

$$\left(\frac{\partial \Omega(y, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 \Omega(y, t)}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \cdots = \left(\frac{\partial^{\mu-1} \Omega(y, t)}{\partial t^{\mu-1}}\right)_{t=0} = 0$$

ist, die Entwicklung der Lösungen der Gleichung (11) in der Form

$$y - \eta_r = B_\mu t^\mu + B_{\mu+1} t^{\mu+1} + \cdots = B_\mu (x-\alpha)^{\frac{\mu}{\nu}} + B_{\mu+1}(x-\alpha)^{\frac{\mu+1}{\nu}} + \cdots,$$

worin B_μ von Null verschieden, und somit y wie z verzweigt.

Es bleibt somit in Hinblick auf die Form der Gleichung (17) nur eine Gleichung

$$y^n + F_1(x) y^{n-1} + F_2(x) y^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(x) y + F_n(x) = 0$$

zu untersuchen, in welcher $F_1(x), F_2(x), \ldots F_n(x)$ innerhalb eines Raumes T eindeutige, endliche, stetige Functionen sind, und zwar nur für alle diejenigen Werthe von x, welche Lösungen von $F_n(x) = 0$ sind und zusammenfallende verschwindende Lösungen von y liefern. Dadurch ist aber die Untersuchung genau auf die Frage zurückgeführt, welche ich in meiner oben angeführten Arbeit behandelt habe, und man kann somit aus den analogen Formen der Functionen $F_1(x), F_2(x), \ldots F_n(x)$ in der Umgebung der mehrfachen Punkte, von den dort näher bezeichneten Fällen abgesehen, die Zahl der Cyklen um die Verzweigungspunkte herum, die Anzahl der Elemente eines jeden Cyklus und das erste Entwicklungsglied erkennen, und genau wie dort die Irreductibilitätscriterien in dem Sinne aufstellen, dass eine Gleichung (11) dann irreductibel genannt wird, wenn sie mit keiner Gleichung niedern Grades, deren Coefficienten in demselben Raume T eindeutige, endliche und stetige Functionen sind, eine Lösung gemein hat.

Indem wir nun zu den Irreductibilitätsuntersuchungen für Differentialgleichungen übergehen, werfen wir zunächst die Frage auf, wann eine homogene lineare Differentialgleichung von der Form

$$(18) \quad g_0(x) y^{(n)} + g_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1}(x) y' + g_n(x) y = 0,$$

in welcher $g_0(x), g_1(x), \ldots g_n(x)$ ganze Functionen von x sind, in dem Sinne irreductibel ist, dass sie mit keiner ebensolchen Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein hat, und heben gleich hier aus später ersichtlichen Gründen hervor, dass nicht etwa der dem erweiterten Eisenstein'schen Satze, nach welchem die algebraische Gleichung

$$g_0(x) y^n + (x-\alpha) g_1(x) y^{n-1} + \cdots + (x-\alpha) g_{n-1}(x) y + (x-\alpha) g_n(x) = 0,$$

für welche $g_0(\alpha)$ und $g_n(\alpha)$ von Null verschieden sind, irreductibel ist, analoge Satz für lineare Differentialgleichungen besteht, wie z. B. die Differentialgleichung

$$y'' - x^2 y' - 3xy = 0$$

zeigt, welche das Integral

$$y = x e^{\frac{x^3}{3}}$$

mit der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$xy' - (1 + x^3) y = 0$$

gemein hat.

Bezeichnet man mit

$$P = g_0(x) y^{(n)} + g_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1}(x) y' + g_n(x) y$$

einen homogenen linearen Differentialausdruck n^{ter} Ordnung, ferner für dieselbe Function y mit

$$Q = h_0(x) y^{(\nu)} + h_1(x) y^{(\nu-1)} + \cdots + h_{\nu-1}(x) y' + h_\nu(x) y$$

einen ebensolchen ν^{ter} Ordnung, worin $\nu < n$ und $g_0(x), \ldots g_n(x)$, $h_0(x), \ldots h_\nu(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, so ergiebt sich bekanntlich durch successive Differentiation als eine in y und dessen Ableitungen identische Gleichung

$$\begin{aligned}(19)\quad h_0^{n-\nu+1} P = {} & h_0^{n-\nu} g_0 \frac{d^{n-\nu} Q}{dx^{n-\nu}} + h_0^{n-\nu-1} (\varphi_1 g_0 + h_0 g_1) \frac{d^{n-\nu-1} Q}{dx^{n-\nu-1}} \\ & + h_0^{n-\nu-2} (\varphi_2 g_0 + h_0 \psi_1 g_1 + h_0{}^2 g_2) \frac{d^{n-\nu-2} Q}{dx^{n-\nu-2}} + \cdots \\ & \cdots + h_0 (\varphi_{n-\nu-1} g_0 + h_0 \psi_{n-\nu-2} g_1 + \cdots + h_0^{n-\nu-1} g_{n-\nu-1}) \frac{dQ}{dx} \\ & + (\varphi_{n-\nu} g_0 + h_0 \psi_{n-\nu-1} g_1 + \cdots + h_1^{n-\nu-1} \chi_1 g_{n-\nu-1} + h_0^{n-\nu} g_{n-\nu}) Q \\ & + k_1 y^{(\nu-1)} + k_2 y^{(\nu-2)} + \cdots + k_\nu y,\end{aligned}$$

in welcher die $\varphi, \psi, \chi, \ldots k$ ganze Functionen von x bedeuten. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sämmtliche Integrale von $Q = 0$ auch $P = 0$ befriedigen, wird somit durch die Gleichungen

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_\nu = 0$$

ausgedrückt, und dasselbe müsste stattfinden, wenn $P = 0$ und $Q = 0$ ein Integral gemein haben, welches nicht schon einer linearen Differentialgleichung niederer Ordnung also der ν^{ten} mit Coefficienten, welche ganze Functionen von x sind, genügt, wonach dann auch alle Integrale von $Q = 0$ Integrale der Differentialgleichung $P = 0$ sein werden. Jedenfalls ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$P = g_0 y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1} y' + g_n y = 0 \tag{20}$$

in dem Sinne reductibel ist, dass sie mit einer homogenen linearen Differentialgleichung niederer Ordnung, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von x sind, ein Integral gemein hat, die, dass für irgend einen Differentialausdruck

$$Q = h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_{\nu-1} y' + h_\nu y, \tag{21}$$

in welchem $h_0, h_1, \ldots h_\nu$ ganze Functionen von x bedeuten und ν irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ darstellt, die identische Beziehung besteht

$$\begin{aligned} h_0^{n-\nu+1} &[g_0 y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1} y' + g_n y] \\ &= h_0^{n-\nu} g_0 \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y] \\ &+ h_0^{n-\nu-1} \omega_1 \frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y] + \cdots \\ &+ h_0 \omega_{n-\nu-1} \frac{d}{dx} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y] \\ &+ \omega_{n-\nu} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y], \end{aligned} \tag{22}$$

in welcher $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-\nu}$ die oben definirten ganzen Functionen von x bedeuten, und dass somit die Differentialgleichung (20) irreductibel ist, wenn eine Gleichung von der Form (22) für kein ν zwischen 1 und $n-1$ und keine Wahl der ganzen Functionen $h_0, h_1, \ldots h_\nu, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-\nu}$ identisch befriedigt werden kann. Aus (22) ergeben sich die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} h_0 g_1 &= g_0[(n-\nu)_1 h_0' + h_1] + \omega_1, \\ h_0^2 g_2 &= h_0 g_0[(n-\nu)_2 h_0'' + (n-\nu)_1 h_1' + h_2] + \omega_1[(n-\nu-1)_1 h_0' + h_1] + \omega_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_0^{n-\nu} g_{n-\nu} &= h_0^{n-\nu-1} g_0 [h_0^{(n-\nu)} + (n-\nu)_{n-\nu-1} h_1^{(n-\nu-1)} + \cdots + (n-\nu)_1 h_{n-\nu-1}' + h_{n-\nu}] \\ &+ h_0^{n-\nu-2} \omega_1 [(n-\nu-1)_{n-\nu-1} h_0^{(n-\nu-1)} \\ &\qquad + (n-\nu-1)_{n-\nu-2} h_1^{(n-\nu-2)} + \cdots + h_{n-\nu-1}] \\ &+ \cdots + \omega_{n-\nu-1}[h_0' + h_1] + \omega_{n-\nu}, \\ h_0^{n-\nu+1} g_{n-\nu+1} &= h_0^{n-\nu} g_0 [h_1^{(n-\nu)} + (n-\nu)_1 h_2^{(n-\nu-1)} + \cdots + (n-\nu)_{n-\nu-1} h_{n-\nu}' + h_{n-\nu+1}] \\ &+ h_0^{n-\nu-1} \omega_1 [h_1^{(n-\nu-1)} + (n-\nu-1)_1 h_2^{(n-\nu-2)} + \cdots \\ &\qquad + (n-\nu-1)_{n-\nu-2} h_{n-\nu-1}^{(n-2\nu+1)} + h_{n-\nu}] \\ &+ \cdots + h_0 \omega_{n-\nu-1} [h_1' + h_2] + h_1 \omega_{n-\nu}, \cdots \\ h_0^{n-\nu+1} g_{n-1} &= h_0^{n-\nu} g_0 [h_{\nu-1}^{(n-\nu)} + (n-\nu)_1 h_\nu^{(n-\nu-1)}] \\ &+ h_0^{n-\nu-1} \omega_1 [h_{\nu-1}^{(n-\nu-1)} + (n-\nu-1)_1 h_\nu^{(n-\nu-2)}] \\ &+ \cdots + h_0 \omega_{n-\nu-1} [h_{\nu-1}' + h_\nu] + \omega_{n-\nu} h_{\nu-1}, \\ h_0^{n-\nu+1} g_n &= h_0^{n-\nu} g_0 h_\nu^{(n-\nu)} + h_0^{n-\nu-1} \omega_1 h_\nu^{(n-\nu-1)} + \cdots + h_0 \omega_{n-\nu-1} h_\nu' + \omega_{n-\nu} h_\nu, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

die somit für irreductible Differentialgleichungen der angegebenen Art nicht erfüllbar sein dürfen. Die Benutzung dieser Untersuchungsmethode für die Irreductibilität linearer Differentialgleichungen würde der von Eisenstein zuerst für Zahlengleichungen angewandten Beweisart durch Nachweis von der Unmöglichkeit der Zerlegung in zwei Polynome entsprechen, und ich will dieselbe kurz skizziren, indem ich auf diesem Wege einen speciellen Fall eines später aufzustellenden allgemeinen Satzes beweise. Es soll gezeigt werden,

dass jede lineare Differentialgleichung der Form

$$(x-\alpha)^{3\varrho+1}G_0(x)\,y'''+(x-\alpha)^{2\varrho+1}G_1(x)\,y''+(x-\alpha)^{\varrho+1}G_2(x)y'+G_3(x)y=0,$$

in welcher $G_0(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ *beliebige ganze Functionen von* x *darstellen,* $G_0(\alpha)$ *und* $G_3(\alpha)$ *von Null verschieden sind, und* ϱ *ein beliebige positive ganze Zahl bedeutet, in dem angegebenen Sinne irreductibel ist.*

Setzt man nämlich in (23)

$$h_\varkappa(x)=(x-\alpha)^{\lambda_\varkappa}\mathsf{H}_\varkappa(x),\qquad \omega_\varkappa(x)=(x-\alpha)^{\mu_\varkappa}\Omega_\varkappa(x),$$

worin $\mathsf{H}_\varkappa(\alpha)$ und $\Omega_\varkappa(\alpha)$ von Null verschieden sein sollen, so werden, wenn

$$\text{A.}\quad \nu=2,$$

die Gradzahlen der niedrigsten Potenzen von $x-\alpha$ in den drei sich ergebenden Gleichungen lauten:

1) $\geqq \lambda_0+2\varrho+1,\ 3\varrho+\lambda_0,\ 3\varrho+1+\lambda_1,\ \mu_1,$
2) $\geqq 2\lambda_0+\varrho+1,\ \lambda_0+3\varrho+\lambda_1,\ \lambda_0+3\varrho+1+\lambda_2,\ \mu_1+\lambda_1,$
3) $2\lambda_0,\ \lambda_0+3\varrho+\lambda_2,\ \mu_1+\lambda_2.$

Ist nun

$$\text{I.}\quad \lambda_1\geqq\lambda_0-\varrho,\quad \lambda_2\geqq\lambda_0-2\varrho,$$

so folgt aus 1) $\mu_1\geqq\lambda_0+2\varrho+1$, und dies ist nach 3) unmöglich, da die letzten beiden Gradzahlen grösser als $2\lambda_0$ sind; ist

$$\text{II.}\quad \lambda_1\geqq\lambda_0-\varrho,\quad \lambda_2<\lambda_0-2\varrho,$$

so liefert 1) wieder $\mu_1\geqq\lambda_0+2\varrho+1$, und dies ist mit 2) unvereinbar; ist

$$\text{III.}\quad \lambda_1<\lambda_0-\varrho,\quad \lambda_2\geqq\lambda_0-2\varrho,$$

so giebt 1) $\mu_1=3\varrho+1+\lambda_1$, was wiederum 2) widerspricht; und ist

$$\text{IV.}\quad \lambda_1<\lambda_0-\varrho,\quad \lambda_2<\lambda_0-2\varrho,$$

so folgt aus 1) $\mu_1=3\varrho+1+\lambda_1$, und dies steht mit 3) in Widerspruch.

Wenn dagegen

$$\text{B.}\quad \nu=1.$$

so werden die Gradzahlen der niedrigsten Potenzen von $x-\alpha$ in den drei Gleichungen (23) sein

1) $\geqq \lambda_0 + 2\varrho + 1,\ 3\varrho + \lambda_0,\ 3\varrho + 1 + \lambda_1,\ \mu_1,$

2) $\geqq 2\lambda_0 + \varrho + 1,\ 2\lambda_0 + 3\varrho - 1,\ \lambda_0 + 3\varrho + \lambda_1,\ \mu_1 + \lambda_0 - 1,\ \mu_1 + \lambda_1,\ \mu_2,$

3) $3\lambda_0,\ 2\lambda_0 + 3\varrho - 1 + \lambda_1,\ \lambda_0 + \lambda_1 - 1 + \mu_1,\ \lambda_1 + \mu_2,$

und somit, wenn

$$\text{I.}\quad \lambda_1 \geqq \lambda_0 - \varrho,$$

nach 1) $\mu_1 \geqq 2\varrho + 1 + \lambda_0$, woraus nach 2) $\mu_2 \geqq \varrho + 1 + 2\lambda_0$ folgt, und somit 3) unmöglich; ist

$$\text{II.}\quad \lambda_1 < \lambda_0 - \varrho,$$

so liefert 1) $\mu_1 = 3\varrho + 1 + \lambda_1$, danach vermöge 2) $\mu_2 = 3\varrho + 1 + 2\lambda_1$, und diese beiden Bestimmungen stehen mit 3) in Widerspruch.

Auf demselben Wege lässt sich der Beweis des entsprechenden allgemeinen Satzes von der Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf dem Nachweis von der Unmöglichkeit des Bestehens der Gleichungen (23) basiren und zwar durch Zerlegung der Untersuchung in die Einzelfälle, für welche

$$\begin{gathered}\lambda_1 \geqq \lambda_0 - \varrho,\ \lambda_2 \geqq \lambda_0 - 2\varrho, \ldots \lambda_\nu \geqq \lambda_0 - \nu\varrho,\\ \lambda_1 < \lambda_0 - \varrho,\ \lambda_2 < \lambda_0 - 2\varrho \qquad \lambda_\nu < \lambda_0 - \nu\varrho\end{gathered}$$

ist, und durch Vergleichung der Gradzahlen der niedrigsten Potenzen von $x = \alpha$ auf beiden Seiten der Gleichungen; wir wollen jedoch gleich ein anderes, ganz allgemeines Verfahren einschlagen, welches nicht blos diesen Satz von der Irreductibilität solcher linearer homogener Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, begründen lässt, sondern ein Mittel an die Hand giebt, um alle diese Sätze, welche aus der Gestalt der Differentialgleichung, deren Coëfficienten beliebige Potenzreihen sind, deren Irreductibilität erkennen lassen, auf weit allgemeinere Classen derselben auszudehnen.

Wie oben jede algebraische Functionalgleichung, deren Coefficienten um $x = \alpha$ herum convergirende Potenzreihen waren, durch Multiplication mit einer passenden ganzzahligen positiven Potenz von $x - \alpha$ auf die Normalform gebracht werden konnte

$$\begin{gathered}(x-\alpha)^n \mathfrak{P}_0(x-\alpha) y^n + (x-\alpha)^{n-1} \mathfrak{P}_1(x-\alpha) y^{n-1} + \cdots + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha) y\\ + \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0,\end{gathered}$$

worin $\mathfrak{P}_0(0),\ \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, so kann bekanntlich jeder homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten in der Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Taylor'sche Reihen darstellen, durch Multiplication mit einer Potenz von $x - \alpha$ die Gestalt gegeben werden

$$(24)\qquad (x-\alpha)^n \mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y' + \mathfrak{P}_n(x-\alpha)y = 0,$$

worin $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ nicht sämmtlich Null sind.

Soll nun die Irreductibilität einer Differentialgleichung von der Form

$$(25)\qquad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y' + (x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)y = 0$$

festgestellt werden, in welcher $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ sämmtlich von Null verschieden sind, wenn nicht etwa der Coefficient einer Ableitung von y identisch Null ist, und $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$ positive ganze Zahlen bedeuten, von denen auf Grund der oben gemachten Annahme, dass in der Gleichung (24) $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ nicht sämmtlich verschwinden sollten, angenommen werden darf, dass mindestens eine dieser Grössen Null ist, soll die Differentialgleichung (25) also mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niederer Ordnung

$$(26)\qquad (x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)} + \cdots + (x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)y' + \mathfrak{Q}_{\nu}(x-\alpha)y = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls Taylor'sche Reihen um $x=\alpha$ herum darstellen, für welche $\mathfrak{Q}_0(0), \mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_{\nu}(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, ein Integral gemein haben, von welchem wir annehmen dürfen, dass dies nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung noch niederer Ordnung angehört, so wird offenbar nach den früheren Auseinandersetzungen, indem die Zerlegungsform mit einer noch unbestimmten positiven oder negativen ganzzahligen Potenz ε von $x-\alpha$ multiplictrt wird, damit diese wieder die oben angegebene Normalform annimmt, nur die Unmöglichkeit der Existenz der nachfolgenden in $y, y', \ldots y^{(n)}$ identischen Beziehung

$$(27)\qquad (x-\alpha)^{\varepsilon}\{(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y' + (x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)y\}$$

$$= (x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)} + \cdots + (x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)y' + \mathfrak{Q}_{\nu}(x-\alpha)y]$$

$$+ (x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_{\nu}(x-\alpha)y]$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)\frac{d}{dx}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_{\nu}(x-\alpha)y]$$

$$+ \mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_{\nu}(x-\alpha)y]$$

für jede Wahl von ν und der um α herum convergenten Potenzreihen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zu erweisen sein, wobei vorausgesetzt werden darf, dass $\mathfrak{Q}_0(0)$, $\mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu(0)$ sowohl als auch $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ nicht sämmtlich verschwinden.

Wie wir nun oben zur Ermittlung der entsprechenden Sätze für die Irreductibilität algebraischer Functionalgleichungen in die in y identische Gleichung (6) $y = \frac{\varkappa}{x-\alpha}$ gesetzt haben, soll in die in y und dessen Ableitungen identische Gleichung (27) die Substitution

$$y = (x-\alpha)^\varkappa$$

gemacht werden, worin $\varkappa$ eine willkürliche von x unabhängige Grösse bedeutet, — was im Grunde auf eine genauere Untersuchung der charakteristischen Function von Frobenius hinausläuft — und man erhält somit, wenn zur Abkürzung

$$(28)\quad \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0^{(r)}(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1^{(r)}(0)+\cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}^{(r)}(0)+\mathfrak{Q}_\nu^{(r)}(0) = r!\,A_r,$$

also

$$(29)\quad [\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\,\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)+\cdots+\varkappa\,\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)](x-\alpha)^\varkappa = A_0(x-\alpha)^\varkappa + A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1} + A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2} + \cdots$$

gesetzt wird, die für jeden Werth von $\varkappa$ identisch zu erfüllende Gleichung

$$\begin{aligned}
(30)\quad & \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\cdots(\varkappa-n+1)(x-\alpha)^{\varkappa+s+\mu_0}\,\mathfrak{P}_0(x-\alpha) \\
&+ \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\cdots(\varkappa-n+2)(x-\alpha)^{\varkappa+s+\mu_1}\,\mathfrak{P}_1(x-\alpha)+\cdots \\
&+ \varkappa(x-\alpha)^{\varkappa+s+\mu_{n-1}}\,\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha) + (x-\alpha)^{\varkappa+s+\mu_n}\,\mathfrak{P}_n(x-\alpha) \\
&= (x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\,\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
&+ (x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\,\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
&= \mathfrak{R}_0(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)A_0(x-\alpha)^\varkappa \\
&\qquad +(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1} \\
&\qquad +(\varkappa+2)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
&+ \mathfrak{R}_1(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_0(x-\alpha)^\varkappa \\
&\qquad +(\varkappa+1)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+\cdots] \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)[\varkappa A_0(x-\alpha)^\varkappa+(\varkappa+1)A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+(\varkappa+2)A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
&+ R_{n-\nu}(x-\alpha)[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots],
\end{aligned}$$

worin mindestens eine der Grössen $\mu_0, \mu_1, \dots \mu_n$ gleich Null ist und $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \dots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ nicht sämmtlich verschwinden.

Nun ist aber leicht zu sehen, dass A_0 nicht für jeden Werth von $\varkappa$ identisch Null sein kann, weil in (28) die Coefficienten der Grössen $\mathfrak{Q}_0(0), \mathfrak{Q}_1(0), \dots \mathfrak{Q}_\nu(0)$, welche der Voraussetzung nach nicht sämmtlich verschwinden sollten, ganze Functionen von $\varkappa$ von fallendem Grade ν bis 0 sind, und da die niedrigste Potenz von $x - \alpha$ auf der rechten Seite der Gleichung (30) die $\varkappa^{\text{te}}$ ist und der Coefficient derselben

$$\begin{aligned} A_0 \{ &\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\,\mathfrak{R}_0(0) \\ &+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0)+\cdots \\ &+\varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\} \end{aligned}$$

lautet, somit nicht identisch verschwinden darf, weil A_0 von Null verschieden, $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \dots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ nicht sämmtlich Null waren und die Coefficienten dieser letzteren Grössen wieder ganze Functionen der willkürlichen Grösse $\varkappa$ von fallendem Grade sind, so wird auch die niedrigste Potenz von $x - \alpha$ auf der linken Seite der Gleichung (30) die $\varkappa^{\text{te}}$ sein. Daraus folgt aber dass $\varepsilon = 0$ sein muss; denn wäre ε eine negative ganze Zahl, so würde, da mindestens eine der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ gleich Null angenommen werden durfte, unter der Voraussetzung

$$\mu_{r_1} = \mu_{r_2} = \cdots = \mu_{r_\delta} = 0 \quad (r_1 < r_2 < \cdots < r_\delta)$$

auf der linken Seite der Gleichung (30) der Coefficient von $(x-\alpha)^{\varkappa+\varepsilon}$, worin $\varkappa + \varepsilon < \varkappa$ ist, lauten

$$\begin{aligned} &\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_1+1)\,\mathfrak{P}_{r_1}(0) \\ &+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_2+1)\,\mathfrak{P}_{r_2}(0)+\cdots \\ &+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_\delta+1)\,\mathfrak{P}_{r_\delta}(0), \end{aligned}$$

und da die Grössen $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \dots \mathfrak{P}_n(0)$ sämmtlich von Null verschieden waren, nicht Null sein können, weil die Coefficienten von $\mathfrak{P}_{r_1}(0), \mathfrak{P}_{r_2}(0), \dots \mathfrak{P}_{r_\delta}(0)$ wieder ganze Functionen von $\varkappa$ von fallendem Grade sind, was unmöglich, da die niedrigste Potenz von $x - \alpha$ auf der rechten Seite von (30) die $\varkappa^{\text{te}}$ ist; wäre aber ε eine positive ganze Zahl, so würde dies aus dem Grunde nicht angehen, weil dann die linke Seite der Gleichung (30) als niedrigste Potenz von $x - \alpha$ die $\varkappa + 1^{\text{te}}$ lieferte, während die rechte Seite ein nicht verschwindendes Glied mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz gab. Es wird somit für eine reductible lineare Differentialgleichung die für jedes $\varkappa$ identische Beziehung bestehen müssen

$$(31)\quad \begin{aligned} &\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+1)(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\\ &+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+2)(x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)+\cdots\\ &+\varkappa(x-\alpha)^{\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)\\ &=\mathfrak{R}_0(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)A_0\\ &\qquad\qquad+(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_1(x-\alpha)\\ &\qquad\qquad+(\varkappa+2)(\varkappa+1)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_2(x-\alpha)^2+\cdots\\ &+\mathfrak{R}_1(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_0\\ &\qquad\qquad+(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_1(x-\alpha)+\cdots]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)[\varkappa A_0+(\varkappa+1)A_1(x-\alpha)+(\varkappa+2)A_2(x-\alpha)^2+\cdots]\\ &+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)[A_0+A_1(x-\alpha)+A_2(x-\alpha)^2+\cdots], \end{aligned}$$

in welcher ν eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots n-1$, $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$ positive ganze Zahlen, Null eingeschlossen und mindestens eine gleich Null, $\mathfrak{P}_0(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ von Null verschieden, $\mathfrak{R}_0(0)$, $\mathfrak{R}_1(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$, sowie $\mathfrak{Q}_0(0)$, $\mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, die Grössen A_r durch (28) definirt sind, und wonach, wenn wiederum

$$\mu_{r_1}=\mu_{r_2}=\cdots=\mu_{r_\delta}=0\quad (r_1<r_2<\cdots<r_\delta),$$

die übrigen μ von Null verschieden sind, durch Identificirung der Coefficienten von $(x-\alpha)$ auf beiden Seiten der Gleichung (31) die Beziehung besteht

$$(32)\quad \begin{aligned} &\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_1+1)\mathfrak{P}_{r_1}(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_2+1)\mathfrak{P}_{r_2}(0)\\ &\qquad+\cdots+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_\delta+1)\mathfrak{P}_{r_\delta}(0)\\ &=[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1(0)\\ &\qquad\qquad+\cdots+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+\mathfrak{Q}_\nu(0)]\\ &\times[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0)\\ &\qquad\qquad+\cdots+\varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)], \end{aligned}$$

worin die Coefficienten der linken Seite ganze Functionen von $\varkappa$ sind, die in ihrem Grade fallen und nur, wenn $r_\delta = n$ ist, der Coefficient von $\mathfrak{P}_n(0)$ die Einheit ist.

Zugleich aber folgt aus der Gleichung (27), weil $\varepsilon = 0$ gefunden wurde, dass

$$\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\,\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)=(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)$$

sein muss, und dass daher, falls die geforderte Zerlegung möglich sein soll, da $\mathfrak{P}_0(0)$ von Null verschieden ist, die Summe der Zahlen, welche die Ordnung des Nullwerdens von $\mathfrak{R}_0(x-\alpha)$ und $\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)$ im Punkte α angeben, gleich μ_0 ist, also für ein ungerades μ_0 nicht gleichzeitig

$$\mathfrak{R}_0(0),\ \mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_0^{(\varrho-1)}(0)=0,\ \mathfrak{Q}_0(0)=\mathfrak{Q}_0'(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_0^{(\varrho-1)}(0)=0$$

und

$$\mathfrak{R}_0^{(\varrho)}(0) \neq 0,\quad \mathfrak{Q}_0^{(\varrho)}(0) \neq 0$$

sein können, worauf wir später zurückkommen.

Wir können aber die Irreductibilitätsuntersuchung einer jeden linearen Differentialgleichung (25), in welcher $\mu_n > 0$ ist, auf diejenige einer solchen Differentialgleichung zurückführen, für welche der Coefficient von y den Factor $x-\alpha$ gar nicht besitzt; denn macht man auf (25) die Substitution

$$y=(x-\alpha)^\lambda z,$$

worin λ zunächst willkürlich bleibt, so geht dieselbe, wenn wir von nun an der Kürze halber bei den $\mathfrak{P}$-Functionen die Bezeichnung des Argumentes $x-\alpha$ fortlassen, über in

$$\begin{aligned}(33)\quad & (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 z^{(n)} + (n\lambda(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0 + (x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1)(x-\alpha)^{n-1}z^{(n-1)}+\cdots \\ & +(\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0+\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)(x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1 \\ & +\cdots+\lambda(x-\alpha)^{\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n)z=0,\end{aligned}$$

und sei nun $\mu_n>0$, $\mu_{r_1}=\mu^{r_2}=\cdots=\mu_{r_\delta}=0$, worin δ nach dem Früheren mindestens 1 sein muss, so werden alle Posten des Coefficienten von z, die zu den anderen μ Exponenten als diesen δ gehören, durch $x-\alpha$ theilbar sein; verlangt man also, dass der Coefficient von z durch $x-\alpha$ nicht theilbar ist, so muss

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+r_1+1)\mathfrak{P}_{r_1}(0)+\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+r_2+1)\mathfrak{P}_{r_2}(0)+\cdots \\ &\qquad +\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+r_\delta+1)\mathfrak{P}_{r_\delta}(0)\end{aligned}$$

von Null verschieden sein, was, da $\mathfrak{P}_{r_1}(0), \mathfrak{P}_{r_2}(0), \ldots \mathfrak{P}_{r_\delta}(0)$ der Voraussetzung nach nicht gleich Null sind, immer zu erreichen ist, da der Ausdruck wegen des fallenden Grades der einzelnen Posten in λ nicht identisch verschwinden kann, und es geht somit die lineare Differentialgleichung in

$$\begin{aligned}(34)\quad & (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 z^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1'}\mathfrak{P}_1' z^{(n-1)}+\cdots \\ & + (x-\alpha)^{1+\mu'_{n-1}}\mathfrak{P}'_{n-1}z' + \mathfrak{P}'_n z = 0\end{aligned}$$

über, wroin wiederum $\mathfrak{P}_0'(0), \mathfrak{P}_1'(0), \ldots \mathfrak{P}_n'(0)$ von Null verschieden angenommen werden dürfen, und die offenbar mit (25) zugleich irreductibel und reductibel ist. Es mag noch bemerkt werden, dass in der so transformirten Gleichung (34) ausser dem μ_n' noch ein anderes μ' den Werth Null wird annehmen müssen, da, wenn nicht schon $\mu_0'=\mu_0=0$ ist, unter der Annahme, dass $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_\sigma > 0$ sind, und $\mu_{\sigma+1}=0$ ist, wie aus dem obigen Bildungsgesetz hervorgeht, $\mu'_{\sigma+1}=0$ sein muss, was nicht der Fall zu sein braucht, wenn $\mu_n=0$ war.

Es handelt sich somit nur um die Irreductibilitätsuntersuchung einer linearen Differentialgleichung der Form

$$(35)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

worin $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ von Null verschieden sind, und die Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ positiv ganz oder auch Null sein können.

Sind nun $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ von Null verschieden, so geht die Gleichung (32) in

$$(36)\quad \mathfrak{P}_n(0) = [\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0) + \mathfrak{Q}_\nu(0)]$$
$$\times[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)]$$

über, woraus

$$\mathfrak{Q}_0(0) = \mathfrak{Q}_1(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{\nu-1}(0) = 0, \quad \mathfrak{R}_0(0) = \mathfrak{R}_1(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0) = 0$$

folgt, und aus

$$\mathfrak{P}_n(0) = \mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$$

ergiebt sich, dass $\mathfrak{Q}_\nu(0)$ und $\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ von Null verschieden sind. Da aber nach (28) $A_0 = \mathfrak{Q}_\nu(0)$ ist, so hat der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) die Form

$$(37)\quad \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1'(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0) + \mathfrak{Q}_\nu'(0)]$$
$$+ \mathfrak{Q}_\nu(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0'(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1'(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)]$$

und ist somit, da ν zwischen 1 und $n-1$ liegt, in Bezug auf $\varkappa$ höchstens vom Grade $n-1$, während der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ lautet

$$(38)\quad \frac{1}{2}\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0''(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1''(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}''(0) + \mathfrak{Q}_\nu''(0)]$$
$$+ [\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0) + \mathfrak{Q}_\nu'(0)]$$
$$\times[(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_0'(0) + \cdots + (\varkappa+1)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)]$$
$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{Q}_\nu(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0''(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1''(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}''(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)],$$

und somit ebenso wie die Coefficienten aller folgenden Potenzen $(x-\alpha)^3$, $(x-\alpha)^4, \ldots$ in Bezug auf $\varkappa$ im Allgemeinen vom n^{ten} Grade.

Ist nun in der Differentialgleichung (35), in welcher $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ positive, von Null verschiedene ganze Zahlen sein sollten, μ_0 die erste dieser Grössen, welche den Werth 1 hat, so wird auf der linken Seite der Gleichung (31) der Coefficient von $(x-\alpha)$, da $\mathfrak{P}_0(0)$ von Null verschieden ist, jedenfalls eine ganze Function n^{ten} Grades von x sein, und daher mit dem Ausdrucke (37) nicht zusammenfallen können, so dass sich zunächst der bereits bekannte*) Satz ergiebt,

dass eine lineare Differentialgleichung der Form

$$(39)\quad (x-\alpha)^{n+1}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, stets irreductibel ist.*

Nimmt jedoch zuerst μ_1 den Werth 1 an, so dass $\mu_0 \geqq 2$, so wird der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der linken Seite von (31) eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf x, und da dieser mit dem Ausdrucke (37) identisch sein muss, so folgt, dass ν nur $=1$ oder $=n-1$ sein kann, und dass somit

die lineare Differentialgleichung

$$(40)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_0 \geqq 2$, $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung erster oder* $n-1^{\text{ter}}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben kann.***)

---

*) Floquet, Annales de l'école normale 1879.

**) Um zu zeigen, wie sich daran eine Reihe weiterer Sätze anknüpfen lässt, mag bemerkt werden, dass in den Differentialgleichungen 1^{ter} oder $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(\text{a})\quad \begin{gathered}(x-\alpha)\mathfrak{Q}_0 y' + \mathfrak{Q}_1 y = 0,\\ (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{Q}_0 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{n-2}\mathfrak{Q}_1 y^{(n-2)} + \cdots + \mathfrak{Q}_{n-1} y = 0,\end{gathered}$$

deren sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (40) genügen sollen, für den Fall dass $\mu_0 = 2$ ist, $\mathfrak{Q}_0'(0)$ von Null verschieden sein muss, da der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der linken Seite der Gleichung (31) vom n^{ten} Grade in Bezug auf x wäre, während derselbe auf der rechten Seite nach dem Ausdrucke (38) für $\mathfrak{Q}_0'(0) = 0$ höchstens den $n-1^{\text{ten}}$ Grad erreichte, und dass die beiden Differentialgleichungen (a), da für die erste derselben $\mathfrak{Q}_0(0) = 0$, für die zweite $\mathfrak{Q}_0(0) = \mathfrak{Q}_1(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{n-2}(0) = 0$ war, somit die Form annehmen

$$(x-\alpha)^2 Q_0 y' + Q_1 y = 0$$

und

$$(x-\alpha)^n Q_0 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{n-1} Q_1 y^{(n-2)} + \cdots + (x-\alpha)^2 Q_{n-2} y' + Q_{n-1} y = 0,$$

worin $Q_0(0)$ von Null verschieden ist; da $Q_1(0)$ resp. $Q_{n-1}(0)$ nach dem Früheren nicht verschwinden, so stimmt dies wieder, wie es sein muss, mit dem oben aufgestellten Irreductibilitätscriterium überein.

Allgemein folgt,

dass die lineare Differentialgleichung

$$(41)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{n-\delta+1}\mathfrak{P}_\delta y^{(n-\delta)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{\delta-1} \gtreqq 2$ *und* $\mu_{\delta+1}, \mu_{\delta+2}, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung* $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots \delta^{ter}$ *oder* $n-1^{ter}, n-2^{ter}, \ldots n-\delta^{ter}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben kann,*

und weiter ergiebt sich aus (37), dass, wenn

$$\begin{array}{ll}
\nu = 1, & \mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{\delta-2}'(0) = 0, \\
\nu = 2, & \mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{\delta-3}'(0) = 0, \\
\vdots & \\
\nu = \delta - 1, & \mathfrak{R}_0'(0) = 0, \\
\nu = n - \delta + 1, & \mathfrak{Q}_0'(0) = 0, \\
\nu = n - \delta + 2, & \mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_1'(0) = 0, \\
\vdots & \\
\nu = n - 1, & \mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{\delta-2}'(0) = 0
\end{array}$$

sein muss, da der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der linken Seite der Gleichung (31) in Bezug auf x vom $n-\delta^{ten}$ Grade ist, und dass somit, wenn $\mu_0 = 2$, nach (38) für ν nur die Werthe δ und $n-\delta$, wenn $\mu_0 > 2$, $\mu_1 = 2$, für ν nur die Werthe $\delta - 1, \delta, n-\delta, n-\delta+1$ u. s. w. übrig bleiben, und somit folgt,

dass, wenn in der Differentialgleichung (41) *von den Zahlen* $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\delta-1}$, *welche grösser als* 1 *waren, die erste, welche den Werth* 2 *hat,* μ_α *ist, während* $\mu_\delta = 1$, $\mu_{\delta+1}, \mu_{\delta+2}, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, diese Differentialgleichung nur mit einer gleichartigen* $\delta-\alpha^{ter}, \delta-\alpha+1^{ter}, \ldots \delta^{ter}, n-\delta^{ter}, n-\delta+1^{ter}, \ldots n-\delta+\alpha^{ter}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben kann,*

woraus wieder die Reihe derjenigen Sätze hergeleitet werden kann, welche dem in der obigen Anmerkung hervorgehobenen entsprechen.

Lassen wir nun die bisher gemachte Annahme fallen, dass von den grösser als Null vorausgesetzten Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ eine den Werth 1 hat, seien also alle grösser als die Einheit, so wird der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der linken Seite von (31) und daher der Ausdruck (37) von x unabhängig sein. Die sich hierfür ergebenden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind

$$(42)\quad \begin{array}{l}
\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\,\mathfrak{Q}_\nu'(0) + \mathfrak{Q}_\nu(0)\,\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0) = \mathfrak{P}_n'(0), \\
\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\,\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0) + \mathfrak{Q}_\nu(0)\,\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0) = 0, \ldots,
\end{array}$$

und von diesen Bedingungsgleichungen wird die letzte lauten

$$(42) \qquad \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\,\mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{Q}_\nu(0)\,\mathfrak{R}_0'(0) = 0,$$

wenn $\nu = n - \nu$ also n eine grade Zahl ist, während, wenn $\nu \gtrless n - \nu$ ist, durch Nullsetzen des Coefficienten der höchsten Potenz von $\varkappa$ entweder $\mathfrak{Q}_0'(0)$ oder $\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ folgt. Da aber im letzteren Falle der Ausdruck (38) jedenfalls von nicht höherem als dem $n - 1^{\text{ten}}$ Grade in $\varkappa$ ist, so wird, wenn die Annahme gemacht wird, dass $\mu_0 = 2$, dass also der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der linken Seite der Gleichung (31) in Bezug auf $\varkappa$ vom n^{ten} Grade ist, wiederum die Unmöglichkeit der Zerlegung der gegebenen Differentialgleichung folgen, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die lineare Differentialgleichung

$$(43) \qquad (x-\alpha)^{n+2}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 2$ *sind, ist, wenn die Ordnung* n *derselben ungerade, stets irreductibel; ist die Ordnung jedoch gerade, so kann sie nur mit einer gleichartigen linearen Differentialgleichung* $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben.*

Nimmt jedoch zuerst μ_1 den Werth 2 an, so dass $\mu_0 > 2$, so wird der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der linken Seite von (31) eine ganze Function $n - 1^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf $\varkappa$ sein, und da dieser wieder mit (38) identisch sein muss, so folgt, dass, wenn $n - \nu > \nu$ oder $n - \nu = \nu + \eta$, wegen $\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{\eta-1}'(0) = 0$ der Grad des mittleren Summanden von (38) in Bezug auf $\varkappa$ der $n - \eta^{\text{te}}$ sein wird, und dass somit entweder $n - \eta = n - 1$ also $\eta = 1$ oder $n - \nu = n - 1$, also $\nu = 1$ sein wird, und ebenso wenn $\nu > n - \nu$ oder $\nu = n - \nu + \eta$ ist, dann $n - \eta = n - 1$ also wieder $\eta = 1$ oder $\nu = n - 1$ ist, somit also nur $\nu = 1, n - 1, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ sein kann, während die Annahme $\nu = n - \nu$ verlangt, dass vermöge (42) $\mathfrak{Q}_0'(0)$ und $\mathfrak{R}_0'(0)$ zugleich Null sind, weil sonst (38) in Bezug auf $\varkappa$ vom n^{ten} Grade wäre, und da dann der mittlere Summand vom $n - 2^{\text{ten}}$ Grade in $\varkappa$ sein würde, so müsste $n - \nu = \nu = n - 1$ oder $\nu = 1, n = 2$ sein. Es ergiebt sich somit der Satz,

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n+1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{n-2+\mu_2}\mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_n y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_0 > 2$, $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{n-1} \geqq 2$ *sind, nur mit solchen gleichartigen*

Differentialgleichungen niederer Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben kann, deren Ordnung 1 *oder* $n-1$, *oder auch, wenn* n *eine ungerade Zahl,* $\frac{n-1}{2}$ *oder* $\frac{n+1}{2}$ *ist.*

Sind sämmtliche $\mu > 2$ und ist $\mu_0 = 3$, so müssen die Ausdrücke (37) und (38) von $\varkappa$ unabhängig sein, und der Coefficient von $(x-\alpha)^3$ auf der rechten Seite der Gleichung (31), welcher lautet

$$
\begin{aligned}
(44)\quad & \frac{1}{3!}\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'''(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'''(0)+\mathfrak{Q}_\nu'''(0)] \\
& +\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0''(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}''(0)+\mathfrak{Q}_\nu''(0)] \\
& \qquad\qquad \times[(\varkappa+2)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)] \\
& +\frac{1}{1!}\frac{1}{2!}[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\mathfrak{Q}_\nu'(0)] \\
& \qquad\qquad \times[(\varkappa+1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_0''(0)+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)] \\
& +\frac{1}{3!}\mathfrak{Q}_\nu(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0'''(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'''(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}'''(0)]
\end{aligned}
$$

der Annahme gemäss, dem Coefficienten auf der linken Seite entsprechend, in Bezug auf $\varkappa$ vom n^{ten} Grade sein.

Ist zunächst $n-\nu=\nu$, so wird die Gleichung (37) befriedigt durch Bestehen der Beziehungen (42); die Unabhängigkeit des Ausdruckes (38) von $\varkappa$ erfordert aber, da der mittlere Posten vom n^{ten} Grade in Bezug auf $\varkappa$ ist, dass $\mathfrak{Q}_0'(0)$ oder $\mathfrak{R}_0'(0)$ verschwinden, und somit wieder nach (42) $\mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{R}_0'(0)=0$ ist, so dass der Ausdruck (44) als Coefficient von $(x-\alpha)^3$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) in Bezug auf $\varkappa$ von niedrigerem Grade als dem n^{ten} wird, was mit der Annahme $\mu_0=3$ nicht zu vereinigen. Es bleiben somit nur die Fälle $\nu > n-\nu$ oder $\nu < n-\nu$ zu erörtern; setzt man $n-\nu=\nu\pm p$, worin $1 \leqq p \leqq n-2$, so verlangt (37)

$$\mathfrak{R}_0'(0)=\mathfrak{R}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{p-1}'(0)=0$$

oder

$$\mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{Q}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{p-1}'(0)=0,$$

und das Verschwinden von $\mathfrak{R}_p'(0)$ wird das von $\mathfrak{Q}_0'(0)$, resp. das von $\mathfrak{Q}_p'(0)$ dasjenige von $\mathfrak{R}_0'(0)$ nach sich ziehen, wie aus den den Gleichungen (42) analogen Beziehungen hervorgeht; da aber die Gradzahlen der drei Posten des Ausdruckes (38) in $\varkappa$, wie leicht zu sehen, durch $\frac{n\mp p}{2}$, $n-p$, $\frac{n\pm p}{2}$ dargestellt sind, und dieser Ausdruck ebenfalls in $\varkappa$ identisch verschwinden soll, so wird, wenn $n-p > \frac{n+p}{2}$ ist, entweder wenn $\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{p-1}'(0) = 0$ ist, $\mathfrak{R}_p'(0)$ oder $\mathfrak{Q}_0'(0)$ also nach (42) stets $\mathfrak{Q}_0'(0) = 0$ sein,

oder

wenn $\mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{p-1}'(0) = 0$ ist, $\mathfrak{Q}_p'(0)$ oder $\mathfrak{R}_0'(0)$, also stets $\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ sein;

ist dagegen $n - p < \frac{n+p}{2}$, so wird nach (38) jedenfalls $\mathfrak{R}_0''(0)$ oder $\mathfrak{Q}_0''(0)$ verschwinden müssen, und wir erhalten somit für $n - p \gtrless \frac{n+p}{2}$ als nothwendig zu erfüllende Bedingungen für das Bestehen der Zerlegungsform der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{p-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0'(0) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R}_0''(0) = 0$$

oder

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{p-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{R}_0'(0) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Q}_0'' = 0.$$

In allen Fällen würde somit der Grad des Ausdruckes (44) in Bezug auf x gegen die Festsetzung, dass $\mu_0 = 3$ ist, unter n sinken, also die angenommene Zerlegung unmöglich sein, wenn nicht $n - p = \frac{n+p}{2}$ oder $n = 3p$, also n eine durch 3 theilbare Zahl ist, und in diesem Falle ergiebt sich $\nu = \frac{n}{3}$ oder $\nu = \frac{2n}{3}$. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die lineare Differentialgleichung

$$(45)\quad (x-\alpha)^{n+3}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 3$ *sind, ist, wenn die Ordnung derselben eine nicht durch* 3 *theilbare ganze Zahl ist, stets irreductibel; ist die Ordnungszahl jedoch ein Vielfaches von* 3, *so kann die Differentialgleichung nur mit einer gleichartigen von der* $\frac{n}{3}$ *ten oder* $\frac{2n}{3}$ *ten Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben.*

Sei nun allgemein die Differentialgleichung vorgelegt

$$(46)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{n-1} \geqq \mu_0$ ist, so werden, wenn dieselbe reductibel ist, auf der rechten Seite der Gleichung (31) die Coefficienten von $(x-\alpha)^1, (x-\alpha)^2, \cdots (x-\alpha)^{\mu_0-1}$ von x unabhängig sein müssen, während der Coefficient von $(x-\alpha)^{\mu_0}$ in Bezug auf x vom n^{ten} Grade sein muss. Bezeichnen wir diese Coefficienten den Gleichungen (37), (38), (44) analog durch

$$(47)\qquad (\mathfrak{Q}_0'(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0)) + (\mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)),$$

$$(48)\qquad (\mathfrak{Q}_0''(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu''(0)) + (\mathfrak{Q}_0'(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) + (\mathfrak{R}_0''(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)),$$

$$(49)\qquad (\mathfrak{Q}_0'''(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu'''(0)) + (\mathfrak{Q}_0''(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu''(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) + (\mathfrak{Q}_0'(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0))\,(\mathfrak{R}_0''(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)) + (\mathfrak{R}_0'''(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'''(0)),$$

. . . .

$$(50)\qquad (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0-1)}(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0-1)}(0)) + (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0-2)}(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0-2)}(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) + \cdots + (\mathfrak{Q}_0'(0), \ldots \mathfrak{Q}_{n-\nu}'(0))\,(\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-2)}(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0-2)}(0)) + (\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-1)}(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0-1)}(0)),$$

worin die $\mathfrak{Q}$-Klammern in Bezug auf x vom ν^{ten} Grade, die $\mathfrak{R}$-Klammern vom $n-\nu^{\text{ten}}$ Grade sind, jedoch sämmtlich linear homogen in Bezug auf die eingeschlossenen Grössen

$$\mathfrak{Q}_0^{(\alpha)}(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\alpha)}(0),\ \mathfrak{R}_0^{(\alpha)}(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\alpha)}(0),$$

so werden die Ausdrücke (47)—(50) von x unabhängig sein müssen, während der Ausdruck

$$(51)\qquad (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0)}(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0)}(0)) + (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0-1)}(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0-1)}(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) + \cdots + (\mathfrak{Q}_0'(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0))\,(\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-1)}(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0-1)}(0)) + (\mathfrak{R}_0^{(\mu_0)}(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0)}(0))$$

eine ganze Function n^{ten} und nicht niedrigeren Grades in x sein soll.

Wir behaupten nun, dass n nie grösser sein kann als $\mu_0 . \nu$; denn sei $n > \mu_0 . \nu$, so erfordert das in x identische Verschwinden von (47), dass

$$\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-2\nu-1}'(0) = 0$$

ist, ebenso wird, weil nunmehr der mittlere Posten des Ausdruckes (48) vom $n-(n-2\nu) = 2\nu^{\text{ten}}$ Grade ist, und (48) wieder in x identisch verschwinden soll,

$$\mathfrak{R}_0''(0) = \mathfrak{R}_1''(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-3\nu-1}''(0) = 0$$

sein müssen, ähnlich

$$\mathfrak{R}_0'''(0) = \mathfrak{R}_1'''(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-4\nu-1}'''(0) = 0,$$

u. s. w., bis das Nullwerden von (50) die Bedingungen

$$\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-1)}(0) = \mathfrak{R}_1^{(\mu_0-1)}(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-\mu_0\nu-1}^{(\mu_0-1)}(0) = 0$$

nach sich zieht. Daraus geht aber hervor, dass der Ausdruck (51) in Bezug auf x von niedrigerem Grade als dem n^{ten} wird, und wir erhalten den Satz, *dass eine Differentialgleichung von der Form*

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq \mu_0$ *sind, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung, deren Ordnung* $\geqq \frac{n}{\mu_0}$ *ist, alle Integrale der letzteren gemein haben kann.*

Endlich mag noch bemerkt werden, dass, weil, wie oben gezeigt worden, für ein ungerades μ_0 nicht gleichzeitig

$$\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_0''(0) = \cdots = \mathfrak{R}_0^{(\varrho-1)}(0) = 0,$$
$$\mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_0''(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_0^{(\varrho-1)}(0) = 0,$$
$$R_0^{(\varrho)}(0) \text{ und } \mathfrak{Q}_0^{(\varrho)}(0) \gtrless 0$$

sein kann, wegen der unter der Annahme $n - \nu = \nu$ herrschenden Symmetrie der Gleichungen (47)—(50) in Bezug auf die $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$

eine Differentialgleichung von gerader Ordnung

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq \mu_0$ *und* μ_0 *eine ungerade Zahl ist, nie mit einer gleichartigen Differentialgleichung der* $\frac{n}{2}$*ten Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben kann.*

Um nun die Anwendung dieser beiden Sätze auf die Reductibilitätsuntersuchung einer linearen Differentialgleichung zu zeigen, werde die Differentialgleichung

$$(52)\quad (x-\alpha)^{n+4}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

vorgelegt. in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 4$ ist, und zunächst bemerkt, dass wegen der Symmetrie der Gleichungen (47), (48), ... in Bezug auf die $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, wenn $n - \nu$ und ν vertauscht werden, nur die Fälle $n - \nu > \nu$ und $n - \nu = \nu$ also $n \geqq 2\nu$ zu untersuchen sind, und somit nach dem vorher ausgesprochenen Satze nur die Annahme $2\nu \leqq n \leqq 4\nu$ zu berücksichtigen ist, wenn die bezeichnete Differentialgleichung reductibel sein soll.

Sei

$$\text{I.}\quad n = 4\nu,$$

so folgt aus dem in x identischen Verschwinden von (47), wenn in den folgenden Gleichungen der Kürze halber die numerischen Coefficienten fortgelassen werden,

$$\mathfrak{R}_0'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_1'(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{2\nu-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{R}_{2\nu}'(0) = 0, \ldots,$$

aus (48)

$$\mathfrak{R}_0''(0), \ldots \mathfrak{R}_{\nu-1}''(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0''(0) + \mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_{2\nu}'(0) + \mathfrak{R}_\nu''(0) = 0, \ldots$$

wonach wiederum die Gleichung (49) Bedingungsgleichungen von der Form

$$\mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_\nu''(0) + \mathfrak{R}_0'''(0) = 0, \ldots$$

ergiebt, welche die Möglichkeit zulassen, dass der Ausdruck (51) in Bezug auf $\varkappa$ vom n^{ten} Grade ist;

$$\text{II.} \quad 3\nu \leqq n < 4\nu,$$

dann ergiebt (47) und (48) die Bedingungen

$$\mathfrak{R}_0'(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-2\nu-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ldots$$

$$\mathfrak{R}_0''(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-3\nu-1}''(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) + \mathfrak{R}_{n-3\nu}''(0) = 0,$$

während (49) $\mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_{n-3\nu}''(0) = 0$, also

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{n-3\nu}'' = 0$$

liefert, und somit, da dann der Grad von (51) in Bezug auf $\varkappa$ niedriger wird als der n^{te}, dieser Fall für die Möglichkeit der Reductibilität ausgeschlossen.

$$\text{III.} \quad 2\nu < n < 3\nu,$$

dann liefert zunächst (47) die Bedingungen

$$\mathfrak{R}_0'(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-2\nu-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0(0) + \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0;$$

aus (48) folgt dann, je nachdem $3\nu - n$ gerade oder ungerade ist,

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ldots \mathfrak{Q}_{\frac{3\nu-n}{2}-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{R}_{\frac{n-\nu}{2}-1}'(0) = 0,$$

$$\mathfrak{Q}_{\frac{3\nu-n}{2}}'(0) \cdot \mathfrak{R}_{\frac{n-\nu}{2}}'(0) + \mathfrak{R}_0''(0) = 0, \ldots$$

oder

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ldots \mathfrak{Q}_{\frac{3\nu-n+1}{2}-1}'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{\frac{n-\nu+1}{2}-1}'(0) = 0,$$

und in beiden Fällen aus (49) $\mathfrak{R}_0''(0) = 0$, was wiederum die Unmöglichkeit der Zerlegung kennzeichnet.

Endlich liefert die Annahme

$$\text{IV.} \quad n = 2\nu$$

nach (47) die Bedingungsgleichungen

$$\mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{R}_0'(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_1'(0) + \mathfrak{R}_1'(0) = 0, \ldots$$

und somit nach (48)

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_0'(0) = 0, \ldots \mathfrak{Q}_{\frac{\nu}{2}-1}'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{\frac{\nu}{2}-1}'(0) = 0$$

oder

$$\mathfrak{Q}_{\frac{\nu+1}{2}-1}'(0) = 0, \ \mathfrak{R}_{\frac{\nu+1}{2}-1}'(0) = 0,$$

je nachdem ν gerade oder ungerade ist, und danach wäre die Erfüllung der Bedingungen für das Verschwinden des Ausdruckes (49) möglich, ohne dass der Grad von (51) für $\mu_0 = 4$ in Bezug auf x unter n zu sinken braucht.

Es ergiebt sich somit nach der obigen Bemerkung, dass die für ν gefundenen Werthe auch für $n - \nu$ gelten, der Satz,

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+4}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 4$ *ist, für ungerade* n *stets irreductibel ist; wenn die Ordnung der Differentialgleichung jedoch eine gerade, so kann sie, wenn* $n \equiv 0$ mod. 4, *nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung von der Ordnung* $\frac{n}{4}, \frac{2n}{4}$ *oder* $\frac{3n}{4}$, *ist jedoch* n *nur durch* 2 *und nicht durch* 4 *theilbar, nur mit einer Differentialgleichung von der Ordnung* $\frac{n}{2}$ *alle Integrale der letzteren gemein haben.*

Ist nun $\mu_0 = 5$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 5$, so sind nur die Fälle

$$n = 5\nu, \quad 4\nu \leqq n < 5\nu, \quad 3\nu \leqq n < 4\nu, \quad 2\nu \leqq n < 3\nu$$

zu untersuchen, und es ergiebt sich der Satz,

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+5}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 5$ *sind, stets irreductibel ist, wenn* n *eine durch* 5 *nicht theilbare Zahl ist; wenn die Ordnungszahl jedoch ein Vielfaches von* 5, *so kann die Differentialgleichung nur mit einer gleichartigen von der* $\frac{n}{5}, \frac{2n}{5}, \frac{3n}{5}, \frac{4n}{5}$ *ten Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben.*

Aehnliche Sätze gelten für jeden Werth von μ_0.

Lassen wir die oben gemachte Annahme fallen, dass in der Gleichung (35), auf welche Form die vorgelegte Differentialgleichung stets reducirt werden konnte, die Grössen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ sämmtlich von Null verschieden sind, und nehmen an dass z. B. $\mu_{n-1} = 0$ ist, also die Differentialgleichung die Form hat

$$(53)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{2+\mu_{n-2}}\mathfrak{P}_{n-2} y'' + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

so wird die Gleichung (32) in

$$\varkappa\cdot\mathfrak{P}_{n-1}(0)+\mathfrak{P}_n(0)=[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(n-\nu+1)\mathfrak{Q}_0(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots$$
$$\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+\mathfrak{Q}_\nu(0)]$$
$$\times[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots$$
$$\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)]$$

übergehen, woraus sich wiederum

$$\mathfrak{Q}_0(0)=\mathfrak{Q}_1(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)=0,\quad \mathfrak{R}_0(0)=\mathfrak{R}_1(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{n-\nu-2}(0)=0,$$
$$\mathfrak{P}_n(0)=\mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu}(0),\quad \mathfrak{P}_{n-1}(0)=\mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)$$

und somit aus (28)

$$A_0=\mathfrak{Q}_\nu(0)$$

ergiebt, oder die entsprechenden durch Vertauschung der $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$. In diesem Falle nimmt der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) nach (28) die Form an

$$(54)\quad((\varkappa+1)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0))\,(\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots$$
$$+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\mathfrak{Q}_\nu'(0))$$
$$+\mathfrak{Q}_\nu(0)(\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots+\varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)),$$

und tritt somit an die Stelle von (37), der entsprechende Ausdruck an die Stelle von (38) u. s. w., und ähnliche Betrachtungen wie die oben angestellten werden wieder zu ähnlichen allgemeinen Sätzen über die Irreductibilität linearer Differentialgleichungen und über die Form der Zerlegung reductibler Differentialgleichungen führen.

So ergiebt sich, wenn wieder $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-2}$ von Null verschiedene ganze positive Zahlen sind und die erste dieser Grössen, welche den Werth 1 hat, μ_0 ist, da auf der linken Seite der Gleichung (31) der Coefficient von $(x-\alpha)$, weil $\mathfrak{P}_0(0)$ von Null verschieden ist, jedenfalls eine ganze Function n^{ten} Grades von $\varkappa$ ist, und da derselbe mit (54) identisch also

$$\nu+1=n\quad\text{oder}\quad n-\nu+1=n$$

sein muss, der Satz:

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+1}\mathfrak{P}_0y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1y^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{2+\mu_{n-2}}\mathfrak{P}_{n-2}y''$$
$$+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}y'+\mathfrak{P}_ny=0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-2}$ von Null verschiedene positive ganze Zahlen bedeuten, wenn dieselbe reductibel ist, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung 1^{ter} oder $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben kann, und genau entsprechend die Reihe analoger Sätze für den Fall, dass $\mu_0 = 2$ u. s. w. oder dass erst ein späteres μ die Werthe $1, 2, \ldots$ annimmt, und dass endlich mehr als zwei der μ-Grössen den Werth Null haben.

Es mag endlich noch die Verallgemeinerung des oben für die lineare Differentialgleichung (39) ausgesprochenen Satzes hervorgehoben werden, wonach

die lineare Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{\varrho n+1}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{\varrho(n-1)+\nu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{\varrho(n-2)+\nu_2}\mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ (x-\alpha)^{\varrho+\nu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-1} \geqq 1$ und ϱ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, irreductibel ist,

welche Gleichung, wenn

$$\varrho n + 1 = n + \mu_0,\ \varrho(n-1) + \nu_1 = n - 1 + \mu_1, \ldots \varrho + \nu_{n-1} = 1 + \mu_{n-1}$$

oder

$$\mu_0 = n(\varrho - 1) + 1,\ \mu_1 = (n-1)(\varrho-1) + \nu_1, \ldots\ \mu_{n-1} = \varrho - 1 + \nu_{n-1}$$

gesetzt wird, in die Form gebracht werden kann

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y'$$
$$+ \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_\varkappa = (n-\varkappa)(\varrho-1) + \nu_\varkappa$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-1} \geqq 1$ ist; es möge hier genügen, die Beweisart an dem speciellen Falle $n = 2$, $\varrho = 3$, $\nu_1 = 1$, also $\mu_0 = 5$, $\mu_1 = 3$ auseinanderzusetzen und somit die Irreductibilität der Differentialgleichung

(55) $$(x-\alpha)^7\mathfrak{P}_0 y'' + (x-\alpha)^4\mathfrak{P}_1 y' + \mathfrak{P}_2 y = 0$$

nachzuweisen. Da nämlich für den Fall der Reductibilität in der Gleichung (31) $\nu = 1$ ist und die linke Seite der Gleichung (31) die Form annimmt

(56) $$\varkappa(\varkappa-1)(x-\alpha)^5\mathfrak{P}_0(x-\alpha) + \varkappa(x-\alpha)^3\mathfrak{P}_1(x-\alpha) + \mathfrak{P}_2(x-\alpha),$$

so wird sich zunächst wieder durch Vergleichung der Coefficienten von $(x-\alpha)^0$ auf beiden Seiten der Gleichung (31)

$$\mathfrak{P}_2(0) = \mathfrak{Q}_1(0)\cdot\mathfrak{R}_1(0),\quad \mathfrak{Q}_0(0) = 0,\quad \mathfrak{R}_0(0) = 0$$

ergeben. Da aber in (56) der Coefficient von $(x-\alpha)$ von $\varkappa$ frei ist, so werden sich aus (37) die Bedingungen ergeben

(57) $$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_0'(0) = 0,\\ &\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_1'(0) + \mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_1'(0) = \mathfrak{P}_2'(0),\end{aligned}$$

und da auch der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ von $\varkappa$ unabhängig ist, so wird nach (38) $\mathfrak{Q}_0'(0)\cdot\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ also nach (57) $\mathfrak{Q}_0'(0) = 0$, $\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ und die weiteren Bedingungen

$$(58)\quad \begin{aligned}&\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_0''(0)+\mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_0''(0)=0,\\ &\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_1''(0)+2\mathfrak{Q}_1'(0)\mathfrak{R}_1'(0)+\mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_1''=\mathfrak{P}_2''(0)\end{aligned}$$

zu erfüllen sein, und es würde zunächst der Forderung genügt werden können, dass der Coefficient (44) von $(x-\alpha)^3$ in $\varkappa$ linear ist, wie es der Ausdruck (56) verlangt. Da aber nun das Glied mit $(x-\alpha)^4$ in (56), also auch der Ausdruck (50)

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{Q}_0''''(0),\ \mathfrak{Q}_1''''(0))+(\mathfrak{Q}_0'''(0),\ \mathfrak{Q}_1'''(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0),\ \mathfrak{R}_1'(0))\\ &+(\mathfrak{Q}_0''(0),\ \mathfrak{Q}_1''(0))\,(\mathfrak{R}_0''(0),\ \mathfrak{R}_1''(0))+(\mathfrak{Q}_0'(0),\ \mathfrak{Q}_1'(0))\,(\mathfrak{R}_0'''(0),\ \mathfrak{R}_1'''(0))\\ &+(\mathfrak{R}_0''''(0),\ \mathfrak{R}_1''''(0))\end{aligned}$$

linear in $\varkappa$ sein muss, so folgt

$$\mathfrak{Q}_0''(0)\mathfrak{R}_0''(0)=0 \quad \text{oder nach (58)} \quad \mathfrak{Q}_0''(0)=0,\ \mathfrak{R}_0''(0)=0,$$

und es würde somit der Coefficient (51) der Potenz $(x-\alpha)^5$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) wegen

$$\mathfrak{R}_0'(0)=\mathfrak{R}_0''(0)=\mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{Q}_0''(0)=0$$

in Bezug auf $\varkappa$ vom ersten Grade sein, was der Form von (56) widerspricht, es ist somit (57) irreductibel.

Durch Substitution anderer Functionalausdrücke als $y=(x-\alpha)^\varkappa$ in die identisch zu befriedigende Gleichung (27) können andere Reihen irreductibler Differentialgleichungen ermittelt werden, und es mag hier nur noch einer allgemeinen Zerlegungsform Erwähnung geschehen, die sich aus der für eine reductible Differentialgleichung nothwendig identisch zu befriedigenden Gleichung (27), in welcher, wie nachgewiesen worden, $\varepsilon=0$ ist, durch Substitution von

$$y=e^{\varkappa(x-\alpha)}$$

ergiebt, worin $\varkappa$ eine willkürliche Grösse bedeutet. Setzt man

$$(x-\alpha)^\nu\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)\varkappa^\nu+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)\varkappa^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)\\ =S(\varkappa,\ x-\alpha)$$

und

$$(x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\varkappa^{n-\nu}+(x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\varkappa^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)\\ =T(\varkappa,\ x-\alpha),$$

worin S eine ganze Function ν^{ten}, T eine solche $n-\nu^{\text{ten}}$ Grades in $\varkappa$ ist, so ergiebt sich aus (27)

$$(58)\quad \begin{aligned}&(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0\varkappa^n+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1\varkappa^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}\varkappa\\ &\qquad+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n\\ &=S\cdot T+\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial\varkappa}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\varkappa^2}+\cdots+\frac{1}{(n-\nu)!}\frac{\partial^{n-\nu}S}{\partial x^{n-\nu}}\cdot\frac{\partial^{n-\nu}T}{\partial\varkappa^{n-\nu}}\end{aligned}$$

als eine für den Fall der Reductibilität der vorgelegten linearen Differentialgleichung in x und $\varkappa$ nothwendig identisch zu erfüllende Gleichung. Ist aber umgekehrt die Zerlegungsform (58) des in $\varkappa$ ganzen Polynoms n^{ten} Grades identisch erfüllt, so kann diese in die Form gesetzt werden

$$(59)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0\varkappa^n+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1\varkappa^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}\varkappa+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n$$
$$=(x-\alpha)^{n-\nu}R_0\left[S\varkappa^{n-\nu}+(n-\nu)_1\frac{\partial S}{\partial x}\varkappa^{n-\nu-1}+(n-\nu)_2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\varkappa^{n-\nu-2}+\cdots+\frac{\partial^{n-\nu}S}{\partial x^{n-\nu}}\right]$$
$$+(x-\alpha)^{n-\nu-1}R_1\left[S\varkappa^{n-\nu-1}+(n-\nu-1)_1\frac{\partial S}{\partial x}\varkappa^{n-\nu-2}+(n-\nu-1)_2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\varkappa^{n-\nu-3}+\cdots+\frac{\partial^{n-\nu-1}S}{\partial x^{n-\nu-1}}\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(x-\alpha)R_{n-\nu-1}\left[S\varkappa+\frac{\partial S}{\partial x}\right]+R_{n-\nu}\cdot S$$

oder durch Multiplication dieser Gleichung mit

$$y_1=e^{\varkappa(x-\alpha)}$$

in die Form

$$(59)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0y_1^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1y_1^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y_1'+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_ny_1$$
$$=(x-\alpha)^{n-\nu}R_0\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0y_1^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1y_1^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu y_1]$$
$$+(x-\alpha)^{n-\nu-1}R_1\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0y_1^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1y_1^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu y_1]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+R_{n-\nu}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0y_1^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1y_1^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu y_1],$$

worin $\varkappa$ eine willkürliche Grösse bedeutet, also y_1 unendlich viele von einander unabhängige Functionen darstellt. Daraus folgt aber, dass die Gleichung (59) eine in y_1 identische sein muss, und dafs somit

die für die Reductibilität der Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1y^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y'$$
$$+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_ny=0$$

nothwendige und hinreichende Bedingung durch die in der beliebigen Grösse $\varkappa$ algebraische Zerlegungsform

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0\varkappa^n+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1\varkappa^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}\varkappa$$
$$+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n$$
$$=S\cdot T+\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial\varkappa}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varkappa^2}+\cdots+\frac{1}{(n-\nu)!}\frac{\partial^{n-\nu}S}{\partial x^{n-\nu}}\frac{\partial^{n-\nu}T}{\partial\varkappa^{n-\nu}}$$

gegeben ist, wenn

$$S = (x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0 \varkappa^{\nu} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1 \varkappa^{\nu-1} + \cdots + \mathfrak{Q}_{\nu},$$
$$T = (x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0 \varkappa^{n-\nu} + (x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1 \varkappa^{n-\nu-1} + \cdots + \mathfrak{R}_{n-\nu}$$

ist, und

$$(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0 y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_{\nu} y = 0$$

die Differentialgleichung darstellt, die ihre sämmtlichen Integrale mit der gegebenen gemeinsam hat.

Heidelberg, den 9. Juli 1899.